DOS FORMAS DE SUPERAR ALGUNAS LIMITACIONES FORMALES EN TEORÍA ECONÓMICA

Fernando Tohmé
Departamento de Economía-
Universidad Nacional del Sur CONICET

Resumen

En este artículo se discute el significado de limitaciones formales en la Teoría Económica y se concluye que deben ser resueltas sin recurrir a las intuiciones que los teóricos aceptan ampliamente. De esta manera, se presta atención acerca de una de las mayores limitaciones denunciadas por los oponentes del *mainstream,* la no cumputabilidad de las funciones de elección. Se muestra cómo dos simples ajustes a los fundamentos formales subyacentes de la Economía (la introducción de oráculos y del Axioma de Determinación) permiten obtener "buenos" resultados sin cambiar las herramientas matemáticas utilizadas por los economistas. Esos cambios conducen, sin embargo, a visiones divergentes de las habilidades cognitivas de los agentes económicos.

Palabras claves: computabilidad; conjetura de Edgeworth; teoría de conjuntos; equilibrio general.

1. Introducción

La Teoría Económica ha sido atacada por diversos motivos. La mayoría de las críticas, desde la falta de realismo hasta la incapacidad de arrojar predicciones precisas, comparten una queja común: el aparato matemático usado para teorizar acerca de los fenómenos económicos no es el correcto, aunque algunos de sus conceptos teóricos sean válidos.

Aquí vamos a argumentar, por un lado, que la Teoría Económica *es* su aparato matemático y, por lo tanto, si algunas ideas son verdaderas deben ser sostenidas por una fundamentación formal correcta. En particular, para una crítica especialmente fundamental, la falta de computabilidad de las entidades fundamentales en Economía, vamos a presentar dos formas de ir al fondo de la cuestión y cambiar sus fundamentos conjunto-teóricos, *sin modificar los argumentos económicos*.

En la sección 2, presentamos una discusión acerca de la naturaleza real de la Teoría Económica. En la sección 3, discutimos en términos informales nuestras dos propuestas para resolver los problemas de fundamentación de la Economía, utilizando, ya sea **oráculos** o el **Axioma de Determinación**. La sección 4, desarrolla estas ideas un poco más formalmente. Finalmente, en la sección 5 concluye el trabajo.

2. Teoría Económica y Computabilidad

Una curiosa característica de la Economía, que diferencia a esta disciplina de otras, reside en el significado acordado a la palabra "teoría". Mientras que en otras partes es entendida como un conjunto de explicaciones para los fenómenos del dominio de interés, en Economía se la concibe como una caja de herramientas (matemáticas) para la búsqueda de explicaciones. Nótese la distinción: para un científico en cualquier otro campo, la "Teoría" Económica debería en realidad denominarse "Herramientas Matemáticas" para Economía. De hecho, para muchos de los expertos en el campo, Teoría Económica y Economía Matemática, son casi indistinguibles. Ambas se ocupan de estudiar el aparato formal, aplicado al análisis de fenómenos económicos.

Aunque esta distinción es iluminadora, debemos puntualizar que los componentes formales de la caja de herramientas van desde algoritmos elementales, hasta cuerpos altamente complejos de conocimiento matemático. Va de suyo, que una distinción adicional, debe formularse entre los pequeños trucos que permiten resolver con facilidad, digamos problemas de optimización (como por ejemplo utilizar funciones Cobb-Douglas) e ideas profundas, que dan forma a las herramientas analíticas de la Economía. Estas últimas, si bien son mucho más profundas que las anteriores, pueden llevar a una simplificación excesiva de la realidad. La más saliente es la hipótesis de racionalidad, de acuerdo a la cual los agentes económicos toman decisiones *racionales.*

La idea de la racionalidad de los agentes, puede rastrearse hasta el concepto de *homo oeconomicus*, tan popular entre los Darwinistas Sociales del siglo XIX. Hoy en día, los economistas teóricos no dotan a esta idea con tal carga ontológica y recurren a ella sólo por razones metodológicas. Su uso principal reside en la formulación de prototipos de comportamiento económico y más precisamente en su comparación con los fenómenos del mundo real. Esto es frecuentemente mal interpretado por los oponentes a la corriente principal en Economía, quienes piensan que los economistas teóricos identifican sus modelos con el mundo real, un error cometido mucho más comúnmente por los economistas no académicos.

Las implicaciones de la hipótesis de comportamiento racional tienen un largo alcance, dado que una buena parte del prototipo principal en Teoría Económica, la **Teoría del Equilibrio General**, está fuertemente basada en ella. La complementaria (y a veces rival) **Teoría de los Juegos,** exhibe aún más claramente la adhesión a la idea de la racionalidad de los agentes. Por otra parte, muchos autores han alertado acerca de los riesgos conceptuales, de adherir a una fundamentación tan demandante. Buscan, en cambio, marcos teóricos en los cuales, los comportamientos puedan verse como siendo menos que racionales. Esta área de investigación y particularmente el estudio de la racionalidad *acotada*, están aún en sus inicios, a pesar de más de medio siglo de trabajo en ella [Simon, 1982; Mirowski 2002]. La mayor parte de la actividad en este área consiste en representar a los agentes como autómatas que responden a cambios en su ambiente (por ejemplo, un cambio en los precios induce como respuesta un cambio en las cantidades demandadas de los bienes). Pero el modelo computacional aplicado en este marco, suele ser un poco burdo y requiere mayores refinamientos.

Más allá del tema de dar una representación adecuada de los agentes económicos, existen resultados interesantes que indican que las funciones de elección individual pueden ser no-computables, lo que lleva a una cierta desesperación por parte de los teóricos que los han presentado. Pero el hecho es que estos resultados, encontrados en particular por Alain Lewis quien, durante los '80 intentó reconstruir la Teoría Económica, son frecuentemente pasados por alto. Una respuesta para salir del paso consiste en decir que estos resultados surgen cuando las estructuras de preferencias postuladas son muy complejas, mientras que eso no es así en las que usan normalmente los economistas. Pero este argumento, constituye una visión muy empobrecedora de la Teoría Económica. La no computabilidad de funciones de elección debe ser entendida como la existencia de "agujeros" en el esquema de demandas de un agente. Esto es que para ciertos precios no va a ser capaz de elegir entre varias alternativas. Restringir las preferencias sólo para resolver este problema constituye una victoria Pírrica: lo que se gana en términos de computabilidad (no mucho), se pierde en exceso en términos de expresividad.

3. Dos herramientas: Oráculos y el axioma de determinación

En vez de la solución mencionada anteriormente, discutiremos cómo la aplicación de herramientas un poco más avanzadas, tomadas de la Lógica Matemática, pueden arrojar marcos alternativos para la Teoría Económica, con expresividad plena. Uno está basado en la idea de que los agentes pueden recurrir a un tipo de *asistente*, que los ayuda en sus procesos de decisión. Este **oráculo** no estaría limitado por las restricciones computacionales que surgen naturalmente en la solución de problemas numéricos. Sería, más bien, un tipo de árbitro en el proceso de deliberación interna que comienza cuando una única solución no puede ser claramente señalada. Aunque esto suene un poco como un truco mágico, la idea de un oráculo computacional no se debe a otro que a Alan Turing, el padre de la Teoría de la Computación. Por medio de este artilugio, Turing mostró que problemas que en principio son irresolubles, admiten una solución. De hecho, mediante la aplicación de oráculos, las funciones sobre los números naturales pueden ser ordenadas de acuerdo a sus grados de complejidad.

Como es obvio, los partidarios de la hipótesis de que los agentes económicos son, por naturaleza, sólo acotadamente racionales, encuentran que la inclusión de oráculos es una forma de dejar intacta la versión tradicional de las decisiones individuales. Pero esto no es necesariamente así, particularmente, si concebimos a los oráculos como representaciones de las habilidades cognitivas aplicadas a la resolución de problemas. Como lo han mostrado décadas de investigación en Inteligencia Artificial, los problemas que son triviales para los seres humanos, pueden llegar a no ser fácilmente resolubles (ni siquiera en principio) por computadoras. Aún, si no acordáramos plenamente con la posición extrema de Roger Penrose, hay un cierto grado de verdad en su afirmación de que los cerebros difieren en forma sustancial de las computadoras digitales.

El rol jugado por los oráculos en este argumento, no es una caracterización de las características cognitivas alternativas de los agentes. Se trata, en cambio, de introducir un aparato formal que puede, eventualmente, ser interpretado en esos terminus, pero que puede ser aplicado sin hacer ninguna referencia directa a capacidades mentales. Dado que el interés de un analista siempre reside en representar matemática o computacionalmente los *resultados* de los procesos de decisión de los agentes, el tema de la interpretación de los medios para alcanzarlos, no es de primera importancia. Por otro lado, la introducción de oráculos permite introducir en la corriente principal de la Economía comportamientos usualmente calificados de "anómalos" [Rabin, 1998]. Relacionado con esto, el cuerpo creciente de investigaciones en la Economía del Comportamiento (*Behavioral Economics*) puede ser fácilmente unido a la corriente principal, arrojando lo mejor de ambos mundos: la variedad de comportamientos descriptos por la primera, descripta en la rica estructura matemática de la última.

Cada uso de reglas heurísticas o procedimientos ad-hoc para la solución de problemas, en Economía, pueden ser vistos como sugerencias hechas por un oráculo. Suponer agentes que aceptan y siguen aquellas sugerencias lleva a nuevas conclusiones, tanto en el campo de la micro como de la macroeconomía. Esto abre nuevos panoramas acerca de los fenómenos económicos, preservando las viejas ideas en los casos en que han mostrado ser sólidas, e incorporando nuevos conceptos cuando se lo requiere.

Otra forma de expandir el alcance de la Teoría Económica, es suponiendo una fundamentación alternativa para sus herramientas matemáticas. Como en la mayor parte de la matemática contemporánea, los modelos económicos pueden ser caracterizados dentro del marco de la Teoría de Conjuntos. Más precisamente, en forma de entidades definibles, en la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel (más el axioma de Elección) conocida como ZFC. Aún, si esto es más que suficiente para las aplicaciones, se vuelve problemática al momento de formalizar nociones como los sistemas de creencias, ocultos en la caracterización de los *tipos* de los agentes en situaciones de información incompleta [Brandenburger and Keisler, 1999; Tohmé, 2005], o en la convergencia del *Core* de una economía Walrasiana, cuando el número de agentes crece sin límites [Aumann, 1966; Anderson, 1978, 1981]. Los axiomas de Regularidad y de Elección, respectivamente, parecen poner un firme límite a la definibilidad de estas nociones.

El hecho de que los teóricos sigan usando conceptos que no son definibles en ZFC indica que no son prescindibles y, por lo tanto, a menos que uno quiera utilizar una teoría sin fundamentos sólidos, deberían guiar la búsqueda de una teoría de conjuntos alternativa, capaz de proveer los conceptos matemáticos útiles. De hecho, esta matemática no debería diferir mucho de la utilizada en las aplicaciones, para evitar ampliar la brecha entre teoría y práctica en Economía. Existen varios enfoques para hacer esto, por ejemplo, cambiar la teoría de conjuntos subyacente por otra (digamos, por la teoría von Neumann-Bernays, o la Kelly-Morse, o las NF de Quine, etc.) o, incluso, abandonar la fundamentación conjuntista por otra basada en la teoría de las categorías. Nuestra opción es mucho más modesta: consiste, en preservar tanto como sea posible de ZFC, sólo reemplazando los axiomas que conducen a dificultades. El candidato a ser excluido es el Axioma de Elección, a la vez que postulamos incluir el **Axioma de Determinación**. En cualquier caso, hay resultados típicamente aceptados por los economistas que pierden su validez (o al menos no sin cualificaciones adicionales), mientras que otros nuevos van a ser aceptados. Pero ciertamente, el resultado más importante que se obtiene es que se puede afirmar la computabilidad de las elecciones si Determinación es impuesta sobre los procesos de deliberación interna llevados a cabo por los agentes económicos.

En cualquiera de los enfoques que podríamos adoptar, es razonable pensar que el “control de última instancia” va a ser ejercido por la significatividad cognitiva de los comportamientos, que van a ser aceptados en el nuevo marco formal. Si la hipótesis de racionalidad va a ser abandonada, no debería ser reemplazada por supuestos menos plausibles.

4. Oráculos y Determinación

La hipótesis de racionalidad de los agentes, fuerza a suponer que cada elección hecha por un agente es óptima, de acuerdo a sus preferencias. Más aún, esto es así en cada situación de elección que se plantea. De otro modo, no sería posible resolver problemas, como la determinación de un equilibrio de mercado. Esto implica requerir que, para cada situación de elección, un agente racional sea capaz de seleccionar una alternativa. Esto se puede lograr mediante una máquina de Turing, que arroje como salida a la elección, cuando las condiciones de entorno sean dadas como entradas. Para hacer esto más preciso, introduzcamos algunas definiciones.

Dado un conjunto de opciones **X**, y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $2^{\mathbf{X}}$, una función de elección $\mathcal{C}$: $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{X}$ es tal que para cada **B** $\mathcal{F}$, $C(\mathbf{B})$ **B**. Es decir, para cada uno de los conjuntos factibles B, la función de elección arroja un único elemento de **B**. Además, suponemos un orden transitivo y completo sobre **X**, denotado por $\preceq$.

Siguiendo a Campbell [1978], decimos que $\mathcal{C}$ es *realizable* si existe una función recursiva[1]
f: $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{N}$, tal que:

- si $x; y$ **X**, $x \preceq y$ sí y sólo sí $f(x) \leq f(y)$
- para todo **B** **F**, $\mathcal{C}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{x}$ $\mathbf{B} : \mathbf{f}(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$; para todo y $\mathbf{B}\}$.

$\mathcal{C}$ se dice recursivamente realizable si dado su *gráfico*, $\mathcal{G} = \{\langle \mathbf{B}; \mathcal{C}(\mathbf{B})\rangle\}_{\mathrm{B}\ \mathcal{F}}$ existe una función recursiva φ tal que $\varphi(\mathbf{B}; \mathcal{C}(\mathbf{B}))$ es 1 si $\langle \mathbf{B}; \mathcal{C}(\mathbf{B})\rangle$ $\mathcal{G}$ y 0 si no.

La diferencia entre la existencia de f y la de φ es crucial. Que exista f asegura que $\mathcal{C}$ sea *recursivamente enumerable* (R.E.)[2] mientras que la existencia de φ asegura la recursividad de $\mathcal{C}$. Esto es, dado que $\mathcal{C}$ es R.E. sabemos que dado un conjunto **B** la opción elegida va a ser encontrada, mientras que si es recursiva sabemos qué opción es elegida en **B**.

Para un ejemplo económico, consideremos que si una función de demanda $x^*_i(\cdot)$ es R.E. podemos determinar, dado un precio p, el consumo elegido. Si conocemos algo más, digamos que $x^*_i(\cdot)$ es recursiva, podemos el encontrar el sistema de precios p^* que define el equilibrio de mercado ($\Sigma^n_{i=1} x^*_i(p^*) = \Sigma^n_{i=1} w_i$).

El problema de si $\mathcal{C}$ es recursivo o no, conduce a un problema más general, el de encontrar a qué clase en la *Jerarquía Aritmética* corresponde. Esta jerarquía, que constituye una taxonomía de grados de *incomputabilidad*, se define del siguiente modo: dado un conjunto de números naturales **A**, consideremos una fórmula de primer orden en el lenguaje de la teoría de los números, $\psi(x)$ tal que $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} : \psi(\mathbf{x})\}$. Entonces [Ash-Knight, 2000]:

• **A** está en Σ^0_0 y en $\prod^0_0$ si $\psi(\cdot)$ es un predicado recursivo.
• **A** está en Σ^0_n si $\psi(x) \equiv \ y_1 \ \ y_2 \ \ y_3 \ldots \Psi(y_1,\ldots,y_n; x)$ donde $\Psi(\ldots)$ es un predicado recursivo.
• **A** está en $\prod^0_n$ si $\psi(x) \equiv \ y_1 \ \ y_2 \ \ y_3 \ldots \Psi(y_1,\ldots,y_n; x)$ donde $\Psi(\ldots)$ es un predicado recursivo.

Un conjunto **A** se dice recursivo si su problema de decisión ("x pertenece a **A**?") tiene un **sí** por respuesta si x **A** y **no** si x **A**. Esta respuesta es provista por una máquina deTuring que computa la función característica recursiva de **A**. Por definición, cada conjunto recursivo está en Σ^0_0 y en $\prod^0_0$. **A** es R.E. si su función característica es R.E., es decir, sus elementos pueden ser enumerados por una máquina de Turing. Se sigue que si **A** y su complemento $\mathbf{A}^c$ son ambos R.E., **A** es recursivo. Un resultado bien conocido de la Teoría de la Recursión muestra que cualquier conjunto R.E. **A** está en Σ^0_1, mientras que $\mathbf{A}^c$ está en $\prod^0_1$.

Esta correspondencia entre grados de recursión y clases en la Jerarquía Aritmética puede ser extendido más allá de Σ^0_1 y $\prod^0_1$. Un conjunto **A** es *n*-enumerable si está en Σ^0_n. Esto es, es tal que sus elementos pueden ser enumerados siempre que los otros elementos en la relación *n*-aria correspondiente que define a **A** han sido enumerados. En otras palabras, **A** es un conjunto Σ^0_n se define por: x **A** sí y sólo sí $y_1 \ \ y_2 \ \ y_3 \ \ \Psi(y_1, \ \ ,y_n; x)$ es verdadero.

Pero esto significa que todos los elementos admisibles $y_1, \ \ ,y_n$ ya han sido enumerados, en particular y_1 (la principal variable cuantificada). Dado que debe mostrarse que hay al menos un valor de y_1 que verifique la expresión, su curso de valores debe ser enumerable. Un argumento similar muestra que **A** está en $\prod^0_n$ (el complemento de Σ^0_n) si los elementos de su complemento pueden ser enumerados una vez que los correspondientes $y_1, \ \ ,y_n$ ya han sido enumerados. Una propiedad que se desprende directamente es que si **A** está en Σ^0_n ($\prod^0_n$), también está en $\Sigma^0_{n+1}(\prod^0_{n+1})$, para todo n.

Dados dos conjuntos **A** y **B** decimos que **A** es *Turing reducible* a **B** si existe una máquina de Turing que traduce el problema de enumerar **A** en el problema de decisión de **B**. Esto es, si **B** fuera recursivo, entonces **A** sería recursivamente enumerable. Si **B** está en Σ^0_n o en $\prod^0_n$, **A** va a estar en $\prod^0_{n+1}$ o en Σ^0_{n+1}, respectivamente. Entonces, si **A** es reducible a **B**, debe ser al menos tan complejo como **B**.

Sobre la base de estas definiciones, Lewis [1985] sostiene que:

En caso que X *sea la representación recursiva de un subconjunto compacto y convexo de* $^{l}_{+}$*,* φ *puede no ser computable para un* $\mathcal{C}$ *genérico, es decir, el gráfico de* $\mathcal{C}$ *no es un conjunto recursivo.*

Una posibilidad a explorar, es si una simple modificación de este marco teórico puede llevar a un resultado positivo, para la computabilidad de funciones de elección. Un primer paso es considerar un juego a la **Gale-Stewart**, es decir, un juego de suma nula con información perfecta, en el que dos jugadores eligen números naturales y uno gana si puede llevar a la secuencia a estar en un cierto conjunto y pierde si no puede lograrlo. Para definir este juego Γ consideramos los mismos requisitos que en el resultado de Lewis: tenemos una presentación recursiva de $\mathcal{C}$ sobre *X*, *f* y una presentación recursiva del dominio de $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, una función recursiva **F** tal que **F**(**B**) =1 si **B** $\mathcal{F}$.

En Γ el agente **I** elige un subconjunto **B** ε $\mathcal{F}$. **II** replica con un elemento x ε **B**, y el jugador **I** elige *y* ε **B**. **I** gana si $f(y) \leq f(x)$ y **II** gana en caso contrario. Si **II** tiene una estrategia ganadora, debe prescribir la elección de *x* ε $\mathcal{C}$(**B**), para cualquier **B** ε $\mathcal{F}$.

El resultado de Lewis puede ser reinterpretado como afirmando que las estrategias ganadoras pueden no ser computables. Pero como *f* es recursiva, podemos definir una relación recursiva **P** sobre $\mathcal{F}$ × X × X tal que **P**(**B**, *x*, *y*) es equivalente a afirmar que *x*, *y* **B** y $f(x) \leq f(y)$. Entonces, un par (**B**, *x*) $\mathcal{G}$ debe verificar para todo *y*, que **P**(**B**, *x*, *y*) es verdadero. Aún si $\mathcal{G}$ no fuera recursivo, el siguiente resultado da una pista de cómo hacerlo recursivo en una estrategia ganadora para Γ [Blass, 1972]:

Si **A** *es un conjunto hiperaritmético—está en* Π^1_1 *y en* Σ^1_1 *–es recursivo en cada estrategia ganadora de un juego asociado.*

Esto es, si existe una estrategia ganadora б para uno de los dos jugadores en un juego de Gale-Stewart basado en **A**, entonces para algún **a**, **a** **A** sí y sólo sí б(**a**) lleva a una victoria.

Esta proposición puede ser aplicada trivialmente a Γ dado que su clase, sea ésta Σ^0_2 como lo afirma Lewis o alguna otra, es trivialmente hiperaritmética debido a las propiedades de la Jerarquía Aritmética. Esto significa que, si existiese una estrategia ganadora para **II** en Γ ésta definiría un conjunto recursivo. Esto es, haría a $\mathcal{C}$ computable.

Por lo tanto, una condición que asegura la computabilidad de C es la existencia de una estrategia ganadora para **II**. Pero más que eso se requiere una caracterización precisa de dicha estrategia.

Esto puede obtenerse o por medio de un **oráculo** o incluyendo en los fundamentos conjuntistas al **Axioma de Determinación**. En el primer caso, un oráculo para una función γ: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ dado x **N**, responde con el valor $\gamma(x)$ [Ash-Knight, 2000]. De este modo, una máquina de Turing que requiere el cálculo de una función arbitraria sobre **N** puede ser potenciada mediante la facultad de consultar a un oráculo para esa función. De hecho, las Turing-reducciones requieren de la asistencia de oráculos que permiten reducir la complejidad de las computaciones.

Si suponemos que la computabilidad se enriquece mediante el uso de oráculos:

Dada una función de elección C*, con grafo* $\mathcal{G}$*, la función* φ *puede ser computada mediante una máquina de Turing con un oráculo para* x^**, la función que arroja la estrategia ganadora para* Γ.

Esto implica que un paso crucial en la computación de la elección de un agente, es el proceso de deliberación interna (representado por el juego Γ). Si existe un plan para llegar a una conclusión en ese proceso (una estrategia ganadora), y este plan puede ser especificado (la tarea del oráculo), se vuelve trivial computar la elección para cualquier conjunto de opciones.

Una forma de obtener un resultado similar, es incluyendo el **Axioma de Determinación** (**AD**), que postula que cada juego de Gale-Stewart está *determinado*, es decir, que existe una estrategia ganadora para el mismo [Jech, 1973, 2003]. Por otro lado, la adición de **AD** a nuestra teoría de conjuntos nos fuerza a abandonar el Axioma de Elección, aunque se supone que es consistente con una versión más débil del mismo, **DC** (el Axioma de las Elecciones Dependientes). **DC** es, en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (**ZF**) equivalente al *Principio de Construcciones Recursivas* [Just-Weese, 1996]. La importancia de esta equivalencia, está en que en la prueba del resultado de Blass acerca de la recursividad basada en estrategias ganadoras, se requiere de la construcción recursiva de los elementos del conjunto hiperaritmético A y otra para las de su complemento. Nuestro argumento no tendría sentido, si la herramienta que usamos no estuviese definida en nuestro marco conceptual.

Por lo tanto decimos que un conjunto es **win-recursivo,** si existe una estrategia ganadora para un juego asociado que haga recursivo al conjunto. Entonces:

En **ZF** + **DC** + **AD**, C *es win-recursivo*.

5. Conclusiones

Hemos argumentado, que cambios en los fundamentos sobre los cuales se asienta la Teoría Económica, sea mediante la introducción explícita de oráculos o del Axioma de Determinación, pueden asegurar la computabilidad de funciones de elección, contrariamente al folklore de los antagonistas a la corriente principal. Aún así, tenemos que aclarar el significado de esta "computabilidad". En primer lugar, tiene que ser interpretada como indicando que en cada situación de elección un agente tiene que ser capaz de decidir, es decir, de elegir una alternativa.

La selección de una alternativa surge como resultado de un proceso de deliberación interna (modelado como un juego de Gale-Stewart). Allí, la caracterización de las estrategias puede ser incomputable, pero notemos que esto tiene que ver con el marco cognitivo del agente, algo que puede ser tan complicado o tan simple como quiera el teórico. La sofisticación plena tiene que asumir que los seres humanos llevan a cabo procesos de razonamiento que están más allá de lo que puede lograr una máquina de Turing (una idea compartida por muchos, incluyendo pensadores importantes como Kurt Gödel y Roger Penrose). Por otro lado, cualquiera de las muchas "anomalías" del comportamiento de los agentes económicos, que involucran una simplificación de los procesos de razonamiento, puede también ser representada en este marco.

Notas

[1] Es decir, existe una máquina de Turing, que dado dos números naturales, x e y, responde **sí** a la pregunta "¿es $f(x)$ igual a y?" si $y = f(x)$, y **no** de otra manera.

[2] Esto significa que hay una máquina de Turing que puede generar cada uno y todos los elementos de la imagen de C.

Bibliography

Anderson, R. (1978) "An Elementary Core Equivalence Theorem". Econometrica, 46, pp.1483-1487.

_____(1981). "Core Theory with Strongly Convex Preferences". Econometrica, 49, pp.1457-1458.

Ash, C.J. - Knight, J. (2000). *Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy.* Elsevier, Amsterdam.

Aumann, R. (1966). “Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders”. Econometrica, 34, pp.1-17.

Blass, A. (1972). “Complexity of Winning Strategies”. Discrete Mathematics**,** 3, pp.295-300.

Brandenburger, A. - Keisler, H.J. (1999). *An Impossibility Theorem on Beliefs in Games*. Working Paper, Harvard Business School.

Campbell, D. (1978). “Realization of Choice Functions”. Econometrica, 48, pp.171-180.

Jech, T. (1973). *The Axiom of Choice***.** North-Holland, Amsterdam.

_____**(**2003). *Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin.

Just, W. - Weese, M. (1996). *Discovering Modern Set Theory*. American Mathematical Society, Providence RI.

Lewis, A. (1985). “On Effectively Computable Realizations of Choice Functions”. Mathematical Social Sciences**,** 10, pp.43-80.

Mirowski, P. (2002). *Machine Dreams: Economics Becomes a Cyborg Science*. Cambridge University Press, Cambridge MA.

Rabin, M. (1998). “Psychology and Economics”. Journal of Economic Literature, 36, pp.11-46.

Simon, H. (1982). *Models of Bounded Rationality*. MIT Press, Cambridge MA.

Tohmé, F. (2005). “Existence and Definability of States of the World”. Mathematical Social Sciences, 49**,** pp.81-100.

TWO WAYS TO OVERCOME SOME FORMAL LIMITATIONS OF ECONOMIC THEORY

Fernando Tohmé
Departamento de Economía- Universidad Nacional del Sur
CONICET

Abstract

In this paper we discuss the meaning of formal limitations in Economic Theory and conclude that they have to be solved without compromising the intuitions that are widely accepted by theoreticians. Then, we focus on one of major limitations denounced by the opponents to the mainstream, the uncomputability of choice functions. We show how two simple adjustments to the underlying formal foundations of Economics (the introduction of oracles and of the Axiom of Determinacy) may allow to keep "good" results without changing the mathematical toolbox used by economists. These changes carry, however, a diverging view of the cognitive abilities of economic agents.

Keywords: computability; Edgeworth conjecture; set theory; general equilibrium.

1. Introduction

Economic Theory has been attacked on several grounds. From the lack of realism to the inability to yield precise forecasts, most of the criticisms share a common complain: the mathematical apparatus used to theorize about economic phenomena is not the right one, although some of the theoretical concepts are valid.

We will argue that one hand, Economic Theory *is* the mathematical apparatus, and therefore if some ideas are still true, they must be supported by the correct formal foundation. In particular, for a particularly fundamental criticism, namely the lack of computability of fundamental entities of Economics, we present two ways to cut through the entire edifice of the discipline and change its formal foundations *without modifying the economic-theoretic arguments.*

In section 2 we will present a discussion about the real nature of Economic Theory and how it has been attacked because of its problems of computability. In section 3 we will present in informal terms our two ways to solve those foundational problems of Economics by using either **oracles** or the **Axiom of Determinacy**. Sections 4 develops this ideas a bit more deeply. Finally, section 5 concludes the paper.

2. Economic Theory and Computability

A curious feature of Economics, that differentiates this discipline from other scientific endeavors is the meaning given to the word "theory". While elsewhere it is understood as a body of explanations for the phenomena in the domain of interest, in Economics it is conceived as a (mathematical) toolbox for the search of explanations. Notice the distinction: for a scientist in another field, Economic "Theory" should be called "Mathematical Tools" for Economics. In fact, for its practitioners, Economic Theory and Mathematical Economics are fairly indistinguishable. Both are concerned with the study of the formal apparatus devoted to the analysis of economic phenomena.

While this distinction is illuminating, we must point out that the formal components of the toolbox range from elementary algorithms to very complex bodies of mathematical knowledge. It goes without saying that a clear distinction should be made between the little artifacts that make it easy to solve, say, optimization problems (like the use of Cobb-Douglas functions) and deep ideas that shape up the analytical tools of Economics. The latter, however deeper than the former, may lead also to a excessively simplified picture of the real world. Most noticeable among them is the hypothesis of rationality, according to which economic agents make *rational* choices.

The idea of the rationality of economic agents can be traced back to the concept of *homo oeconomicus*, so popular among the Social Darwinists of the XIXth century. Nowadays, theoretical economists do not invest the idea with such ontological burden, and resort to it just for methodological reasons. Its main use is in the construction of prototypes of economic behavior, and more precisely in the design of benchmarks against which to compare real world phenomena. This is usually misunderstood by the opponents to the mainstream in Economics, who think that economic theorists identify their models with the real world, a mistake most commonly made by non-academic economists.

The implications of the hypothesis of rational behavior are far reaching, since a good deal of the main prototype in Economic Theory, namely **General Equilibrium Theory**, is heavily based on it. The complementary (and sometimes rival) **Theory of Games** exhibits even more clearly the adherence to the idea of rationality of agents. On the other hand, many authors have shown a concern for this allegiance to a very demanding foundation. They seek to build theoretical bodies of knowledge in which behaviors are seen as less than rational. This area of research, and particularly the study of *bounded* rationality is still in its beginnings despite the efforts made for half a century [Simon, 1982; Mirowski 2002]. Most of the work in this area concentrates on a representation of agents as automata that respond to environmental changes (for instance, a change of prices induces, as a response, a change in the demanded amount of goods). But the computational models usually applied in these alternative frameworks are somewhat crude and require further refinements.

Beyond the issue of an adequate representation of economic agents there exist interesting results indicating that individual choice functions might be non-computable, which could lead theoreticians to a certain feeling of despair. But the fact is that these results, found in particular by Alain Lewis, who attempted during the 1980s to rebuild Economic Theory, are largely disregarded. A facile response to those results is that they obtain for very complex characterizations of preferences while for the functional forms usually conceived by the economists they do not. But this argument implies a very impoverishing view of the elements of Economic Theory. The non-computability of choice functions must be understood as the existence of "holes" in the demand schedule of an agent, i.e. that for certain prices she will not be able to choose one among many alternatives. To restrain the form of the preferences just to solve this problem is a rather Pyrrhic victory: what is gained in terms of computability (not much) is largely surpassed by the loss of expressiveness.

3. Two Tools: Oracles and the Axiom of Determinacy

Instead of the aforementioned solution, we will discuss how the application of a bit more advanced tools drawn from Mathematical Logic may yield alternative, fully expressive, frameworks for Economic Theory. One is based on the idea that agents can resort to a kind of *assistant* to help out in their decision making processes. This **oracle** would not be limited by the computational constraints that arise naturally in the solution of numerical problems. It would rather be an umpire in the internal deliberation process that starts when a unique solution cannot be clearly pinpointed. Even if this sounds a bit like a magic trick, the idea of a computational oracle is due to no other than Alan Turing, the father of the Theory of Computation. By means of this device Turing showed that problems which are, in principle, unsolvable admit a certain kind of solution. In fact, it is through the application of oracles that functions over the natural numbers can be ordered in terms of their degrees of complexity.

As it is obvious, partisans of the hypothesis that economic agents are by nature only bounded rational will find the inclusion of oracles as a way to leave untouched the traditional version of individual choice. But this is not necessarily so, particularly if we conceive the oracles as representing cognitive abilities applied in the resolution of problems. As it has been shown by decades of research on Artificial Intelligence, problems that are trivial for human beings cannot be easily (not even in principle) solved by computers. Even if we do not fully concur with Roger Penrose's extreme position, there seems to be a grain of truth in his claim that human brains differ substantially from a digital computer.

The role played by oracles in this argument is clearly not as a characterization of alternative cognitive features of economic agents. It is instead a formal device which eventually could be interpreted as such but can be applied without any direct reference to mental abilities. Since the interest of an analyst is always to represent either mathematically or computationally the *outcomes* of the decision processes carried out by economic agents, the issue of the interpretation of devices to determine those outcomes is not a pressing one. On the other hand, the introduction of oracles allows to introduce into the mainstream of Economic Theory behaviors deemed usually as "anomalous" (Rabin, 1998). Related to this, the growing body of research in *Behavioral Economics* could be easily fused with the mainstream, yielding the best of both worlds: the variety of behaviors described by the former in terms of the rich mathematical structure of the latter.

Each use of heuristic rules or ad-hoc procedures towards the solution of problems in Economics could be seen as a suggestion made by an oracle. To assume agents that accept and follow those suggestions leads immediately to new conclusions, both in the field of macro and microeconomics. This opens new vistas on economic phenomena, keeping the old ideas in the cases in which they show to be sound, and incorporating new ones on demand.

Another way to expand the scope of Economic Theory is by assuming an alternative foundation for its mathematical tools. As in most of contemporary mathematics, economics models can be characterized in the framework of Set Theory. More precisely, in the form of entities definable in the Zermelo-Fraenkel plus the axiom of Choice version of axiomatic Set Theory (**ZFC**). Even if this is more than enough in applications, it may become troublesome when it comes to formalize notions such as the systems of beliefs hidden in the characterization of *types* of agents in situations of incomplete information [Brandenburger and Keisler, 1999; Tohmé, 2005], or in the convergence of the *Core* of a Walrasian economy when the number of agents tends to infinity [Aumann, 1966; Anderson, 1978, 1981]. The axioms of Regularity and Choice, respectively, seem to put a firm limit to the definability of those notions.

The fact that theoreticians still use concepts that are not definable in **ZFC** indicates that they are not dispensable and thus, unless one wishes the theory to lack of solid foundations, they should guide the search for an alternative set theory able to support useful mathematical concepts. This mathematics should not differ widely from the one used in applications, since otherwise we would be widening the gap between theory and practice in Economics. There exist several approaches to this, for example to change the underlying set theory for another one (say, the theory of von Neumann-Bernays, or Kelly-Morse, or Quine's NF, etc.) or even to drop the use of a set theoretic foundation to resort to a category-theoretical one. Our choice is much more modest: it consists in keeping as much of **ZFC** as possible, just replacing the axioms that lead to difficulties. Our candidate to be thrown out is the Axiom of Choice, while we think it is appropriate to introduce the **Axiom of Determinacy**. In any case, there will be results typically accepted by economists that will lose their validity (or at least they will still be valid but with qualifications) while new ones will become accepted. But certainly the most important result we can obtain from this change is that computability can be predicated upon choices if Determinacy is imposed on the internal deliberation processes carried out by economic agents.

In any of the approaches we could adopt, it is reasonable to ask that the "control of last resort" should be exerted by the cognitive meaningfulness of the behaviors that become accepted in the new formal framework. If the hypothesis of rationality has to be dropped, it should not be replaced by a less plausible assumption.

4. Oracles and Determinacy

The hypothesis of rationality of the agents forces to assume that each choice made by an agent is optimal, according to her preferences. Moreover, this is so for any given choice situation. Otherwise we would not be able to solve a problem like the determination of a market equilibrium. This amounts to require that for each choice situation, a rational agent has to be able to select an alternative. This can be achieved by Turing machine that yields the choice as an output when the environmental conditions are given as inputs. To make this a bit more precise, let us introduce some definitions.

Given a set of options $\mathbf{X}$, and $\mathcal{F}$ a subset of $2^{\mathbf{X}}$, a choice function $C\colon \mathcal{F} \to \mathbf{X}$ is such that for each $\mathbf{B} \quad \mathcal{F}$, $C(\mathbf{B}) \quad \mathbf{B}$. In words: for each of its feasible subsets $\mathbf{B}$, the choice function yields only one element in $\mathbf{B}$. Furthermore, a transitive and complete order over $\mathbf{X}$, denoted $\preceq$ is assumed to exist.

Then, following Campbell [1978], we say that C is *realizable* if there exists a recursive function[1]
f: $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{N}$, such that:

• if $x; y \quad \mathbf{X}$, $x \preceq y$ if and only if $f(x) \leq f(y)$
• for all $\mathbf{B} \quad \mathcal{F}$, $C(\mathbf{B}) = \{\mathbf{x} \quad \mathbf{B} : \mathbf{f}(\mathbf{y}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x})$; for all $\mathbf{y} \quad \mathbf{B}\}$.

C is said recursively realizable if given its *graph*, $\mathcal{G} = \{\langle \mathbf{B}; C(\mathbf{B})\rangle\}_{\mathbf{B} \ \mathcal{F}}$ it exists a recursive function φ such that $\varphi(\mathbf{B}; C(\mathbf{B}))$ is1 if $\langle \mathbf{B}; C(\mathbf{B})\rangle \quad \mathcal{G}$ and 0 otherwise.

The difference between the problem of the existence of f and that of the existence of φ is crucial here. The existence of f ensures that C is *recursively enumerable* (R.E.)[2] while the existence of φ yields the recursivity of C. That is, if C is R.E. we know that given a set **B** the chosen option may be found, while if it is recursive we know which option is chosen in each **B**.

For an economic example, consider that if a demand function $x^*_i(\cdot)$ is R.E. we may determine, given a price p, the chosen consumption. If we know more, namely that $x^*_i(\cdot)$ is recursive, we are able to find the price system p^* that yields the market equilibrium $(\Sigma^n_{i=1} x^*_i(p^*) = \Sigma^n_{i=1} w_i)$.

The problem of whether C is recursive or not, leads to another, more general problem, which is to find to which class in the *Arithmetic Hierarchy* it corresponds. This hierarchy, which constitutes a form of classifying degrees of *uncomputability*, is defined as follows: given a set of natural numbers **A**, consider a first-order formula in the language of the theory of numbers $\psi(x)$ such that $\mathbf{A} = \{\mathbf{x} : \psi(\mathbf{x})\}$. Then [Ash-Knight, 2000]:

• **A** is in Σ^0_0 and in Π^0_0 if $\psi(\cdot)$ is a recursive predicate.
• **A** is in Σ^0_n if $\psi(x) \equiv \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \Psi \ (y_1, \quad, y_n; x)$ where $\Psi(\quad)$ is a recursive predicate.
• **A** is in Π^0_n if $\psi(x) \equiv \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \Psi \ (y_1, \quad, y_n; x)$ where $\Psi(\quad)$ is a recursive predicate.

A set **A** is said recursive if its decision problem ("does x belong to **A**?") has a **yes** answer if $x \quad$ **A** and a **no** answer if $x \quad$ **A**. This answer is provided by a Turing machine, which computes the recursive characteristic function of **A**. By definition, each recursive set is in Σ^0_0 and in Π^0_0. **A** is R.E. if its characteristic function is R.E., i.e., its elements can be generated (enumerated) by a Turing machine. It follows that if **A** and its complement $\mathbf{A}^c$ are both R.E., **A** is recursive. A well-known result in

Recursion Theory shows that any R.E. set **A** is in Σ^0_1, while $\mathbf{A}^c$ is in Π^0_1.

This correspondence between degrees of recursion and classes in the Arithmetic Hierarchy can be extended beyond Σ^0_1 and Π^0_1. A set **A** is said n-enumerable if it is in Σ^0_n. That is, it is such that its elements can be enumerated provided that the other elements in the corresponding *n*-ary relation that defines Ahave been enumerated. In other words, suppose Ais a Σ^0_n set, i.e. x **A** if and only if y_1 y_2 y_3 $\Psi(y_1, \; ,y_n; x)$ is true.

But this means that all the admissible elements $y_1, \; ,y_n$ have been already enumerated, in particular y_1 (the leading quantified variable). Since it must be shown that at least one value of y_1 verifies the expression, its entire course of values should be enumerable. A similar argument shows that **A** is in Π^0_n (the complement of Σ^0_n) if the elements of its complement can be enumerated once the corresponding $y_1, \; ,y_n$ are enumerated as well. A straightforward property of this hierarchy is that if A is in Σ^0_n (Π^0_n), it is also in Σ^0_{n+1}(Π^0_{n+1}), for all n.

Given two sets **A** and **B** we say that **A** is *Turing reducible* to **B** if there exists a Turing machine that translates the problem of enumerating **A** into a decision problem for **B**. That is, if **B** were recursive, then **A** would be recursively enumerable. If **B** is in either Σ^0_n or Π^0_n, **A** will be in Π^0_{n+1}or in Σ^0_{n+1}, respectively. Then, if **A** is reducible to **B**, it is at least as complex as **B**.

With all these notions at hand, Lewis'[1985] main result is as follows:

In the case that X *is the recursive representation of a compact and convex subset of* $\Re^l_+$, φ *may not be computable for a generic* C, *i.e. the graph of* C *is not a recursive set.*

A possibility we want to explore is whether a simple modification in the theoretical framework may lead to a positive result for the computability of choice functions. As a first step, let us consider a **Gale-Stewart** game, i.e. a zero-sum, perfect information game in which two players choose natural numbers and one wins if she can lead the sequence to be in a certain set and looses otherwise. To define this game, Γ we will consider the same prerequisites as those for the Theorem of Lewis: we have the recursive presentation of C over X, f and a recursive presentation of the domain of C, $\mathcal{F}$, i.e. a recursive function **F** such that **F**(**B**) =1 if **B** $\mathcal{F}$.

In Γ Agent **I** (the *spoiler*) chooses a subset **B** $\mathcal{F}$. **II** replies with an element x

B, and player **I** chooses y **B**. **I** wins if $f(y) \leq f(x)$ and **II** wins otherwise. If **II** has a winning strategy it must consist in choosing x $\mathcal{C}$(**B**), for any **B** $\mathcal{F}$.

The result of Lewis may be reinterpreted as stating that winning strategies for the representation of choice functions are not necessarily computable. But, since f is recursive, we can define a recursive relation **P** over $\mathcal{F} \times X \times X$ such that **P**(**B**, x, y) is equivalent to, x, y **B** and $f(x) \leq f(y)$. Then, a pair (**B**, x) $\mathcal{G}$ must verify that for all y, **P**(**B**, x, y) is true. Even if $\mathcal{G}$ were not recursive, the following result gives a clue of how to make it recursive in a winning strategy of Γ (Blass, 1972):

If A *is an hyperarithmetical set—it is both* Π^1_1 *and* Σ^1_1 *—it is recursive in every winning strategy of an associated game.*

This means that, if there exists a winning strategy σ for one of the two players in a Gale-Stewart game based on **A**, then for a given **a**, **a** **A** if and only if σ (**a**) leads to a win.

This proposition can be trivially applied to Γ since its class, be it either Σ^0_2 as claimed by Lewis or otherwise, is trivially hyperarithmetical due to the properties of the Arithmetic Hierarchy. This means that, if there is a winning strategy for **II** in Γ this winning strategy defines a recursive set. That is, $\mathcal{C}$ will be computable.

Therefore, a condition that needs to be met to ensure the computability of $\mathcal{C}$ is the existence of a winning strategy for **II**. But more than that, it requires a precise characterization of that strategy.

This can be achieved either by means of an **oracle** or by including in the set-theoretical foundation the **Axiom of Determinacy**. In the first case, an oracle for a function γ: **N** $\rightarrow$ **N** is a device that, given x **N**, responds with the value $\gamma(x)$ [Ash-Knight, 2000]. So, a Turing machine that requires as an intermediate step of its computation the value of an arbitrary function over **N** can be empowered allowing it to consult an oracle for that function. Oracles are required, in fact, to perform Turing-reductions, i.e. to reduce the complexity of computations.

If we assume that computability is extended by means of oracles, we can make the following claim:

Given a choice function $\mathcal{C}$*, with graph* $\mathcal{G}$*, the function* φ *can be computed by a Turing machine with an oracle for x * the function that yields the winning strategy for* Γ.

This result implies that a crucial step in the determination of a choice is the internal deliberation process (represented by the game Γ). If there exists a plan to reach a conclusion in that process (a winning strategy), and this plan can be specified (the task of the oracle), it becomes trivial to compute a choice for each possible set of options.

Another form to achieve a similar result is by including in our set theory the **Axiom of Determinacy** (**AD**), which states that each Gale-Stewart game is *determined*, i.e. there exists a winning strategy for it [Jech, 1973, 2003]. On the other hand, the addition of **AD** to our underlying set theory forces us to drop the Axiom of Choice, although it is widely assumed that it is consistent with the weaker **DC** (Axiom of Dependent Choices). **DC** is, in the set theory of Zermelo-Fraenkel (**ZF**) equivalent to the *Principle of Recursive Constructions* [Just-Weese, 1996]. The importance of this equivalence for us is that the proof of the Proposition of Blass on recursivity based on winning strategies, requires the recursive construction of an ordering of the elements of a hyperaritmethical set A and another for those in its complement. Our argument would be meaningless if the very tool we use is not available in the new framework.

Therefore, if we say that a set is **win-recursive** if there exists a winning strategy for an associated game that makes the set recursive, we have that:

In **ZF** + **DC** + **AD**, C *is win-recursive.*

As with oracles, this result implies that the internal deliberation process represented by the game Γ will have well defined outcomes, those prescribed by the winning strategy. Its existence will be forced by the presence of **AD** in the formal framework.

5. Conclusions

We have argued that changes in the underlying foundations upon which Economic Theory is built, namely the explicit introduction of oracles or of the Axiom of Determinacy, may ensure the computability of choice functions, contrary to the folklore of the antagonists to the mainstream. Even so, we have to make some provisos about the meaning of this “computability”. In the first place, it must be interpreted as indicating that in each choice situation, an economic agent will be able to decide, i.e. she will choose an alternative.

The selection of the alternative arises as the result of an internal deliberation process (modeled as a Gale-Stewart game). Still, the characterization of the strategies in this process may be uncomputable, but notice that this concerns the cognitive framework of the agent, which may be as involved or simple as the theorist wants. Full sophistication has to assume that human beings perform reasoning processes beyond the limits of Turing machines (an idea shared by many, including important thinkers like Kurt Gödel and Roger Penrose). On the other hand, any of the many "anomalies" of behavior of economic agents, which involve a simplification of the reasoning processes, may also be represented in our framework.

In any case, our proposal addresses the question of how to keep previously accepted results, but now standing on firmer foundations. Of course, much more work is needed to find out the full implications of this exercise.

Notes

[1] That, is, there exists a Turing machine, that given two natural numbers, x and y, answers yes to the question "is f(x) equal to y?" if y = f(x), and no otherwise.

[2] This means, that there exists a Turing machine that can generate each and all the elements of the image of C.

Bibliography

Ver artículo en castellano.